

Capítulo 2

Determinantes

2.1. Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $(n \times n)$. El determinante de una matriz cuadrada de orden “ n ”, denotado por: $|A|$, se define como el número calculado de la siguiente suma relativa:

$$|A| = \sum \left(\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

Donde la suma recorre todas las permutaciones $j_1, j_2, \dots, j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. El signo se toma como positivo o negativo, según que la permutación sea par o impar.

2.2. Orden de un determinante

Es similar al orden de una matriz.

Es decir:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz } A \text{ de orden } (3 \times 3)$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \text{Determinante de tercer orden.}$$

2.3. Desarrollo de determinantes

2.3.1. Regla de Sarrus

Esta regla solo es aplicable para el desarrollo de determinantes de tercer orden.

Ejemplo 2.1 Mediante la regla de Sarrus, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 6 & -7 & 4 \\ 3 & 6 & -8 \end{vmatrix}; |B| = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 9 & -5 & 2 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix}; |C| = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 7 \\ -9 & 8 & 4 \\ 6 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de la matriz A , para lo cuál aplicamos una de las variantes de Sarrus es decir, escribiendo las dos primeras filas en la parte inferior y efectuando operaciones:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 9 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \\ 3 & 6 & -8 \\ -2 & 9 & 5 \\ 6 & -7 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-7)(-8) + (6)(6)(5) + (3)(9)(4) - (3)(-7)(5) - (-2)(6)(4) - (6)(9)(-8)$$

$$|A| = -112 + 180 + 108 + 105 + 48 + 432 = 761$$

2.3.2. Método de Cofactores o Laplace

2.3.2.1. Cofactor o adjunto de un elemento (a_{ij})

Es el determinante menor que resulta de abolir la fila ' i ' y la columna ' j ', correspondiente a ese elemento y afectado por un signo positivo o negativo, según que la suma de los lugares que ocupan, cada una de sus filas y cada una de sus columnas en la matriz de orden ' n ', sea un número par o impar respectivamente.

Sea la matriz:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, el cofactor o adjunto de (a_{ij}) está dado por:

$$A_{ij} = \text{adj}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Ejemplo 2.2 Si tenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular: a) B_{13} ; b) B_{21} ; c) B_{32} ; d) B_{22} .

Desarrollando el inciso b)

$$B_{21} = \text{adj}(a_{21} = 6) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B_{21} = (-1)^3 [3(4) - 1(5)] = -[12 - 5] = -7$$

2.3.2.1. Reglas del desarrollo por Cofactores

1. Se disponen los signos correspondientes a las distintas posiciones, empezando por el signo positivo en el vértice superior izquierdo, luego alternativamente se disponen los signos negativos, etc.
2. Se elige una fila o columna cualquiera, con preferencia la que tenga mayor número de ceros.

3. Se desarrolla el determinante por los elementos de esa línea, multiplicando cada elemento por el adjunto correspondiente.

4. Se reitera el procedimiento para cada uno de los determinantes de menor orden obtenidos.

Es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{Ley de signos} \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Ejemplo 2.3 Calcular el valor de los siguientes determinantes por el método de Cofactores:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 & 6 \\ 8 & 0 & -2 & 3 \\ -5 & 7 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & -3 & 6 \end{vmatrix}; \quad |C| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & -9 & 2 & 7 \\ -7 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de A, por los elementos de la segunda columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ -2 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -0 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -8 \left\{ -6 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} - 2 \left\{ 3 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$|A| = -8 \{ -6(15 - 8) + 5(4 + 15) \} - 2 \{ 3(-6 - 12) \}$$

$$|A| = -8 \{ -42 + 95 \} - 2 \{ -54 \} = -424 + 108 = \boxed{-316}$$

2.3.3. Método de Gauss-Chio

En éste método los pasos que se siguen para el desarrollo de determinantes, son muy similares a los de Gauss-Jordan, con algunas excepciones que se pueden observar a continuación.

1. Se elige como pivote un elemento cualquiera no nulo y se extrae como un factor que multiplica al determinante.
2. Se divide toda la fila del pivote, entre ese elemento pivote.
3. Se anulan todos los elementos de la columna del pivote, con excepción del mismo pivote.
4. El resto de los elementos que no se encuentran ni en la fila ni en la columna del pivote se obtienen de la misma forma que los elementos transformados, es decir mediante la regla del rectángulo.
5. El desarrollo del nuevo determinante obtenido se logra, mediante las reglas del desarrollo por Cofactores.
6. Se elige un nuevo pivote, sin tomar en cuenta la fila ni la columna de los pivotes anteriores; y se reitera todo el procedimiento estudiado.

Ejemplo 2.4 Hallar el valor de los siguientes determinantes, mediante Gauss-Chio:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & 0 & 7 \end{vmatrix}; |B| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}; |C| = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 20 & 0 & 37 \end{vmatrix}$$

Por Gauss-Chio Por Cofactores

$$|A| = (1)(1) \begin{vmatrix} -2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & \boxed{-1} & 2 & 10 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 20 & 0 & 37 \end{vmatrix} = (1)(-1) \begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & 40 \\ -3 & 1 & -2 & -10 \\ 11 & 0 & 3 & 23 \\ 63 & 0 & 40 & 237 \end{vmatrix}$$

Por Gauss-Chio Por Cofactores

$$|A| = (-1)(1) \begin{vmatrix} 10 & 5 & 40 \\ 11 & 3 & 23 \\ 63 & 40 & 237 \end{vmatrix} = (-1)(5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & -1 \\ -17 & 0 & -83 \end{vmatrix}$$

Por Gauss-Chio Por Cofactores

$$|A| = (-5)(-1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -17 & -83 \end{vmatrix} = 5[5(-83) - (-17)(-1)]$$

$$|A| = 5[-415 - 17] = \boxed{-2160}$$

2.4. Propiedades de los determinantes (Demostrar 3x3)

- Teorema 1.** Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada son suma de dos términos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes.

Es decir, si tenemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } |A| = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Teorema 2. Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un mismo escalar, su determinante correspondiente queda multiplicado por ese escalar.

Vale decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Teorema 3. El determinante de una matriz identidad es igual a la unidad.

En símbolos: $|I_n| = 1$

Teorema 4. Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es igual a cero.

Significa que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 5. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es igual a cero.

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 6. Si en una matriz cuadrada a los elementos de una columna o fila, se le agrega otra columna o fila previamente multiplicada por un escalar, el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz original.

Vale decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A la columna tres le sumamos α veces la columna uno:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \alpha a_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \alpha a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A^*| = |A|$$

Teorema 7. Si en una matriz cuadrada se permutan dos columnas o dos filas, el valor del determinante de la matriz así obtenida, es de signo contrario, pero igual en valor absoluto al determinante de la matriz original.

Significa que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Permutando las dos primeras columnas:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta$$

Teorema 8. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz transpuesta.

En símbolos:

$$|A_n| = |A_n^t|$$

Ejemplo 2.5 Calcular el valor de los siguientes determinantes, utilizando sus propiedades:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}; |B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}; |C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 + 2F_3 \\ F_4 + (-3)F_3}} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Por Cofactores

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -6 & 7 & -1 & -8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -7 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{vmatrix} -6 & 7 & -1 & -8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 15 & -14 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Por Cofactores

$$|A| = -7 \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 + 2C_2 \\ C_3 + 3C_2}} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por Cofactores

$$|A| = (-7)(1) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = -7[8(14) - (5)(9)]$$

$$|A| = -7[112 - 45] = \boxed{-469}$$

2.4. Propiedades de los determinantes

1. **Teorema 1.** Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada son suma de dos términos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes.

Es decir, si tenemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } |A| = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Teorema 2. Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un mismo escalar, su determinante correspondiente queda multiplicado por ese escalar.

Vale decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Teorema 3. El determinante de una matriz identidad es igual a la unidad.

En símbolos: $|I_n| = 1$

Teorema 4. Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es igual a cero.

significa que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 5. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es igual a cero.

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 6. Si en una matriz cuadrada a los elementos de una columna o fila, se le agrega otra columna o fila previamente multiplicada por un escalar, el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz original.

Vale decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A la columna tres le sumamos α veces columna uno:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \alpha a_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \alpha a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \alpha a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \alpha a_{31} \end{vmatrix}$$

$$|A^*| = |A|$$

Teorema 7. Si en una matriz cuadrada se permutan dos columnas o dos filas, el valor del determinante de la matriz así obtenida, es de signo contrario, pero igual en valor absoluto al determinante de la matriz original.

Significa que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Permutando las dos primeras columnas:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta$$

Teorema 8. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz transpuesta.

En símbolos:

$$|A_n| = |A_n^t|$$

Ejemplo 2.5 Calcular el valor de los siguientes determinantes, utilizando sus propiedades:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}; |B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}; |C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & -7 & 4 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$F_1 + 2F_3$ Por Cofactores

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -6 & 7 & -1 & -8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -7 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 7 & -1 & -8 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$F_3 + F_1$ Por Cofactores

$$|A| = -7 \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$C_1 + 2C_2$ Por Cofactores
 $C_3 + 3C_2$

$$|A| = (-7)(1) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = -7[8(14) - (5)(9)]$$

$$|A| = -7[112 - 45] = -7[67] = -469$$

$$a) \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-4)$$

Desarrollo:

$$b) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & c-a-b & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ b+a+c & -b-a-c & 2b \\ 0 & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$C_1 - C_2$
 $C_2 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ a+b+c & -(b+a+c) & 2b \\ 0 & b+a+c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$F_2 + F_1$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2a+2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \left\{ -1 \begin{vmatrix} -1 & 2a+2b \\ 1 & c-a-b \end{vmatrix} \right\}$$

Por Cofactores

$$= (a+b+c)^2 \{ -1 [(-1)(c-a-b) - 1(1)(2a+2b)] \}$$

$$= (a+b+c)^2 \{ -1 [-c+a+b-2a-2b] \} = (a+b+c)^2 \{ -1(-a-b-c) \}$$

$$= (a+b+c)^3$$

$$c) \begin{vmatrix} a^4 & b^4 & c^4 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a+c)(b-c)(b+c)(a-b)(a+b)$$

$$d) \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+b_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}$$